Automatique :
Introduction à l'automatique des systèmes échantillonés
Cours

Automatique Linéaire

Ce que l'on a vu :

- la transformé de Laplace,
- les systèmes du premier et second ordre, leurs caractéristiques en temporel et en fréquentiel,
- le formalisme en schéma bloc,
- choix et dimensionnement d'un correcteur (P, PI, PID),
- (la stabilité des systèmes asservis).

Bonne nouvelle : tout ça reste entièrement valable et valide

Mauvaise nouvelle : nous avons réalisé les correcteurs avec AOP+résistances+capacités

TECHNOLOGIQUEMENT OBSOLETE

Déploiement industriel : Automates programmables

<u>En milieu industriel :</u> asservissements généralement en armoires électrique avec des automates programmables

- Dispositif programmable, et donc re-programmable,
- différentes Entrées/Sorties (Tout ou rien, PWN, E/S numériques, E/S analogiques),
- MAIS, toujours contrôlé en **numérique**

Objectifs du module

- Comprendre comment est numérisé un signal du point de vue de l'automatique,
- Cours.

- Modéliser des systèmes en numériques : automatique échantillonnée et transformée en z
- cours, TD, TP

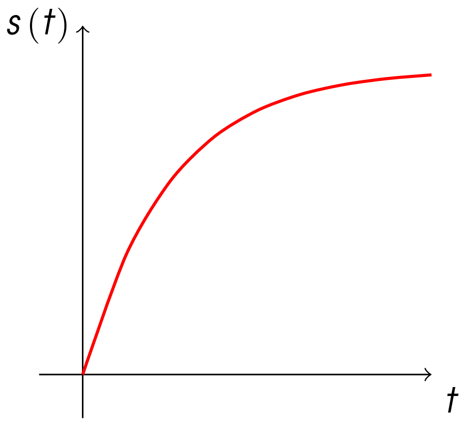
- Dimensionner un correcteur en numérique, ou numériser un correcteur analogique,
- TP

Vous serez évalué sur un TP (sur 2 séances).

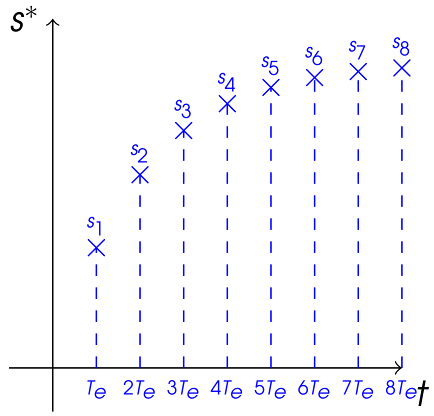
Numérisation d'un signal

La conversion ou numérisation d'un signal repose sur son **échantillonnage**

signal analogique : temps continu
définit quelque soit t



signal numérique : temps discret
définit uniquement à $t = kT_e$

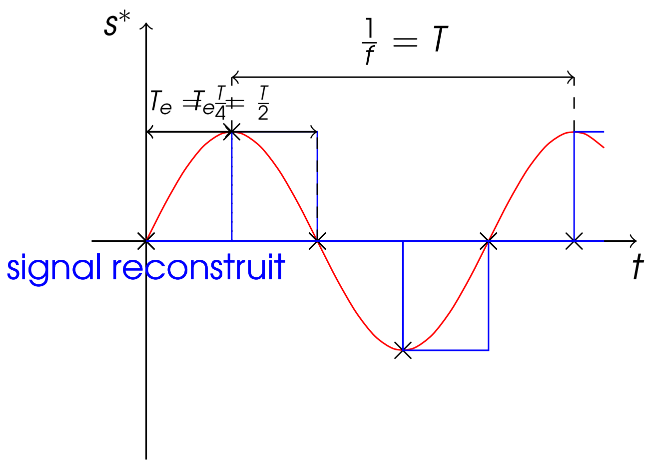


On parle de fréquence d'échantillonnage f_e :

$$f_e = \frac{1}{T_e}$$

Théorème de Shannon

Problème : si la fréquence d'échantillonage, il est potentiellement impossible de reconstruire le signal



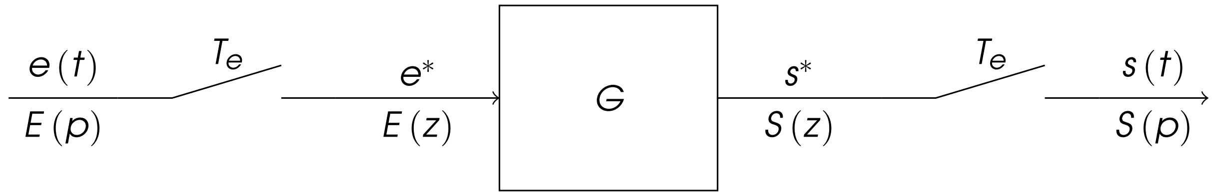
Théorème de Shannon

Pour numériser un signal ayant pour fréquence maximale f_{max}, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage f_e telle que :

$$\boxed{f_e > 2f_{max}}$$

Transformation des systèmes

Pour tenir compte de la discretisation, on note:



En temps discret

On définit une nouvelle transformée : **La transformée en** z:

- de variable z
- qui transforme un signal $e*$ en $E(z)$, et $s*$ en $S(z)$
- qui permet d'étendre la fonction de transfert d'un bloc échantillonné à

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

par la suite nous allons voir :

- comment passer du domaine de Laplace au domaine de z,
- comment relier l'entré et la sortie d'une signal échantillonné à sa fonction de transfert en z.

Sens physique derrière la variable z

Définition théorique de la transformée en z

- Définition complexe (liée à celle de la transformée de Laplace) - *non vue ici*
- MAIS définition basée en partie sur l'égalité suivante :

$$z = e^{pT_e}$$

avec T_e la période d'échantillonnage, p la variable de Laplace

Conséquences

- Il est facile de passer de la transformée en z à un équivalent en p, mais dans l'autre sens moins...
- Dans le domaine de Laplace, e^{-Tp} est un retard pur de valeur T (en seconde).
  donc z^{-1} est un retard pur d'une période d'échantillonnage :

  c'est un blocage d'une valeur, une mise en mémoire d'une valeur pour une durée T_e

Bref rappel mathématique

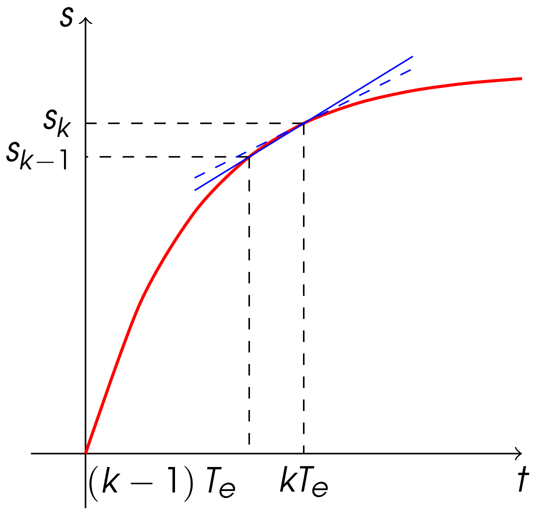
pour rappel, l'exponentielle complexe est une fonction définie sur $\mathbb{C}$, et :

$$\boxed{e^{\jmath x} = \cos(x) + \jmath \sin(x)}$$

Formules d'Euler pour rappel, une formule intéressante en trigonométrie est :

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

Equivalence à la dérivation



définition mathématique de la dérivée :

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}$$

Mais en échatillonné, le pas le plus petit sur l'axe des temps est T_e

On va donc approximer la dérivée par

$$\frac{df(kT_e)}{dt} \approx \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e}$$

- $Z\left(\frac{s_k - s_{k-1}}{T_e}\right) = S(z)\,\frac{1 - z^{-1}}{T_e}$
- Dans l'espace de Laplace, dériver revient à multiplier par p

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Appartée : que deviennent les systèmes en z

Pour rappel, les systèmes avec un signal d'entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$ étaient modélisés par une équation différentielle (cf Autom Linéaire cours 1), qui ressemblait à :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

avec $a_n, \cdots a_0$ et $b_n, \cdots, b_0$ des coefficients,
cette équation différentielle donnait par transformée de Laplace **la fonction de transfert**

En reprenant l'équivalence de la dérivée

On peut constater qu'on aura une équation caractéristique d'un système sous la forme:

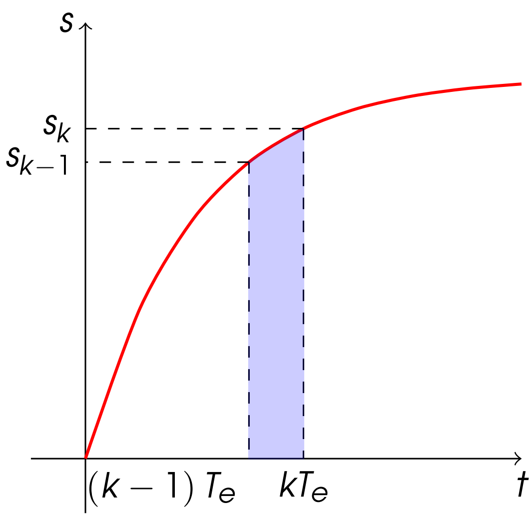
$$S(z)\left(c_n + c_{n-1}z^{-1} + \cdots + c_0 z^{-n}\right) = E(z)\left(d_m + d_{m-1}z^{-1} + \cdots + d_0 z^{-m}\right)$$

en utilisant le fait que z^{-1} est une mémoire, on obtient **l'équation aux différences** du système :

$$\boxed{c_n s_k + c_{n-1} s_{k-1} + \cdots + c_0 s_{k-n} = d_n e_k + d_{n-1} e_{k-1} + \cdots + d_0 e_{k-m}}$$

Equivalence à l'intégration

De manière similaire à l'équivalence à la dérivation



Intégrale : aire sous la courbe entre deux points
Approximation possible : aire d'un trapèze (en bleu ici)

$$\text{Aire} = T_e \frac{s_{k-1} + s_k}{2}$$

et Intégrale)

$$\text{Aire} = \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} d(t)\, dt = F(kT_e) - F((k-1)\,T_e)$$

- Dans l'espace de Laplace, intégrer revient à diviser par p

$$p \leftrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Table des équivalences

Les méthodes de passages de p vers z sont basées sur des **approximations**

Dans certains cas, possibilité d'utiliser des tables de correspondances.
Exemple:

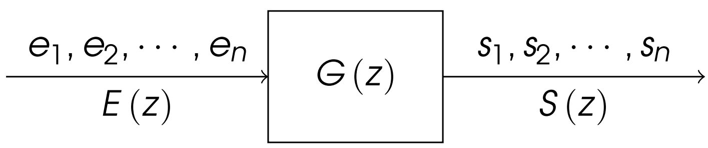
fonction de transfert en temps comptinu	fonction de transfert en temps discret
$G(p) = \frac{1}{p+a}$	$G(z) = \frac{1-e^{-aT_e}}{a\left(z-e^{-aT_e}\right)}$
$G(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$G(z) = \frac{\left(1-e^{-aT_e}\right)\left(1-e^{-bT_e}\right)}{ab\left(z-e^{-aT_e}\right)\left(z-e^{-bT_e}\right)}$
$G(p) = \frac{1}{p(p+a)}$	$G(z) = \frac{T_e}{a(z-1)} - \frac{1-e^{-aT_e}}{a^2\left(z-e^{-aT_e}\right)}$

Comportement fréquentiel des systèmes échantilllonnés

Une solution simple consiste à calculer la **Transformé de Fourier en temps discret** des signaux d'entrée/sortie:
on substitue z avec l'équation suivante :

$$z = e^{\jmath\omega T_e} = e^{\jmath 2\pi f T_e} = e^{\jmath 2\pi \frac{f}{f_e}}$$

où f_e est la fréquence d'échantillonnage.



on obtient alors

$$G\left(e^{\jmath\omega T_e}\right) = \frac{S\left(e^{\jmath\omega T_e}\right)}{E\left(e^{\jmath\omega T_e}\right)} = \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon(\omega)} = \gamma(\omega) = \gamma(2\pi f)$$

avec σ et ϵ les transformées de Fourier en temps discret en entrée/sortie.

- Gain :$G = |\gamma(\omega)|$
- n'a de sens que sur l'interval $\left[0, \frac{f_e}{2}\right]$ (cf. Shannon)